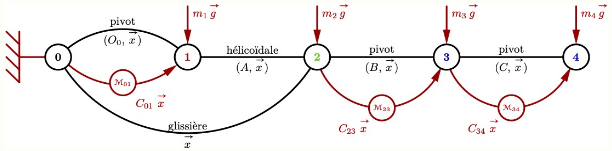
Résolution d'un problème de statique

Analyse



Graphe de structure

- Liaisons détaillées + actions mécaniques
- **Indiquer** les liaisons avec frottement
- **Remarquer** les solides et ensembles de solides uniquement sous l'action de 2 ou 3 « glisseurs »

Modélisation

Actions surfaciques

Sans frottement

Forme canonique des liaisons normalisées

Avec frottement

$$\left\{1 \to 2\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix}\right\}_{Q}^{\mathcal{B}}$$

Aucune composante nulle a priori

Actions volumiques

$$\left\{pes \to 1\right\} = \left\{\begin{matrix} m\,\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{G}$$

Simplification

Système plan

Les torseurs sont des glisseurs ou des torseurs couple

Plan $(Q, \perp\!: \vec{n})$ $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \vec{\mathcal{F}}(1 \to 2) \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_Q(1 \to 2) \,/\!/\, \vec{n} \end{matrix}\right.$

. . . et donc au moins 3 composantes nulles dans $\left\{1 \to 2\right\}$

Contact ponctuel en Q

Lois de Coulomb : forme « globale » éventuellement « étendue » avec ν, δ

$$\vec{\mathcal{F}}(1 \to 2) = \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) + \underbrace{\vec{\mathcal{T}}(1 \to 2)}_{\textit{à déterminer}}$$

Si δ et ν sont négligés (fréquent) : $\vec{\mathcal{M}}_Q(1 \to 2) = \vec{0}$ **!**

Translation (ou limite de) sur plan

Lois de Coulomb : forme « globale »

$$\vec{\mathcal{F}}(1 \to 2) = \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) + \underbrace{\vec{\mathcal{T}}(1 \to 2)}_{\textit{à déterminer}}$$

Cas général

Lois de Coulomb : forme « locale »
P : point de la surface de contact $\mathbf{1/2}$

$$\underbrace{\vec{\mathsf{f}}_P(1 \to 2)}_{N/m^2} = \underbrace{\vec{\mathsf{f}}_P^{\,n}(1 \to 2)}_{\textit{modèle donné}} + \underbrace{\vec{\mathsf{f}}_P^{\,t}(1 \to 2)}_{\textit{à déterminer}}$$

$$\left\{1 \to 2\right\} = \left\{\begin{matrix} \displaystyle\int_{P \in S} \vec{\mathsf{f}}_P(1 \to 2)\, ds \\ \displaystyle\int_{P \in S} \vec{QP} \wedge \vec{\mathsf{f}}_P(1 \to 2)\, ds \end{matrix}\right\}_{Q}$$

Résolution

Globale

- Appliquer le PFS à (n-1) solides ou groupes de solides pour évaluer toutes les actions mécaniques (si le système est isostatique). Méthode à éviter. . .
  $\Rightarrow$ Résolution de $6(n-1)$ équations scalaires (de $3(n-1)$ dans le cas d'un système plan)

Dénombrer les inconnues recherchées afin de connaître le nombre d'équations nécessaires à la résolution

Ciblée

- Choisir les **isolements** (voir en particulier les cas des solides ou ensembles de solides en équilibre sous l'action de 2 ou 3 glisseurs)
- Choisir judicieusement des **points d'application** pour les TMS afin de faciliter les calculs, généralement en utilisant les propriétés des liaisons
- Choisir des **projections** adéquates pour se limiter aux équations utiles à la résolution du problème

Application du PFS

Exemple

PFS appliqué à $\{\mathbf{3{,}4}\}$ $/\boldsymbol{\mathcal{R}_g}$: $\Big\{ 2 \to 3 \Big\} + \Big\{ \mathcal{M}_{23} \to 3 \Big\} + \Big\{ pes \to 3 \Big\} + \Big\{ pes \to 4 \Big\} = \Big\{ \; 0 \; \Big\}$ (ou ***B.A.M.E.***)

TMS appliqué à $\{\mathbf{3{,}4}\}$ $/\boldsymbol{\mathcal{R}_g}$ en B suivant $\vec{x}$: $\underbrace{\vec{\mathcal{M}}_B(2 \to 3) \cdot \vec{x}}_{\mathbf{0}\ (LP)} + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_B(\mathcal{M}_{23} \to 3) \cdot \vec{x}}_{C_{23}} + \vec{\mathcal{M}}_B(pes \to 3, 4) \cdot \vec{x} = 0$

$\hookrightarrow$ *détermination de* C_{23}

Rappel

- Un glisseur ne peut exercer **aucun moment** suivant un axe qu'il traverse !
- Il faut indiquer **toutes** les actions qui agissent sur le système isolé

Des cas particuliers très utiles qu'il est **indispensable** de connaître…

Savoir

Si un système matériel Σ est en équilibre dans $\boldsymbol{\mathcal{R}_g}$ sous l'action de 2 forces modélisables par des glisseurs $\{A, \overrightarrow{F_A}\}$ et $\{B, \overrightarrow{F_B}\}$, alors :

- ces deux glisseurs ont même support, c.-à-d. la droite (A, B) ;
- $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$

(*cas classiques : vérin, biellette, etc.*)

Savoir

Si un système matériel Σ est en équilibre dans $\boldsymbol{\mathcal{R}_g}$ sous l'action de 3 forces modélisables par des glisseurs $\{A, \overrightarrow{F_A}\}$ et $\{B, \overrightarrow{F_B}\}$ et $\{C, \overrightarrow{F_C}\}$, alors :

- les supports de ces 3 glisseurs sont coplanaires : plan (A, B, C) et concourants en un même point : $J = (A, \overrightarrow{F_A}) \cap (B, \overrightarrow{F_B}) \cap (C, \overrightarrow{F_C})$;
- $\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} = \vec{0}$

Contact entre deux solides : Lois de Coulomb

Cas général : lois locales

Non-glissement (ou adhérence) en P : $\vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$

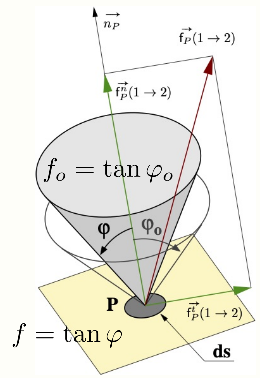
Norme : $\| \vec{f}^{\,t}_P(1 \to 2) \| \leq f_0 \, \| \vec{f}^{\,n}_P(1 \to 2) \|$

Glissement en P : $\vec{V}(P \in 2/1) \neq \vec{0}$

Direction : $\vec{f}^{\,t}_P(1 \to 2) \wedge \vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$

Sens : $\vec{f}^{\,t}_P(1 \to 2) \cdot \vec{V}(P \in 2/1) < 0$

Norme : $\| \vec{f}^{\,t}_P(1 \to 2) \| = f \, \| \vec{f}^{\,n}_P(1 \to 2) \|$



Ponctuelle : lois globales (liaison théorique)

Non-glissement en I : $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$

Norme : $\| \vec{\mathcal{T}}(1 \to 2) \| \leq f_0 \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$

Glissement : $\vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0}$

Direction : $\vec{\mathcal{T}}(1 \to 2) \wedge \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$

Sens : $\vec{\mathcal{T}}(1 \to 2) \cdot \vec{V}(I \in 2/1) < 0$

Norme : $\| \vec{\mathcal{T}}(1 \to 2) \| = f \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$

Ponctuelle : lois étendues (théorique)

Les paramètres δ de pivotement et ν de roulement, homogènes à des longueurs, sont **le plus souvent négligés**

Non-pivotement en I de $\mathbf{2/1}$: $\vec{\Omega}^n_{2/1} = \vec{0}$

Norme : $\| \overrightarrow{\mathcal{M}^n_I}(1 \to 2) \| \leq \delta \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$

Pivotement : $\vec{\Omega}^n_{2/1} \neq \vec{0}$

Direction : $\overrightarrow{\mathcal{M}^n_I}(1 \to 2) \wedge \vec{\Omega}^n_{2/1} = \vec{0}$

Sens : $\overrightarrow{\mathcal{M}^n_I}(1 \to 2) \cdot \vec{\Omega}^n_{2/1} < 0$

Norme : $\| \overrightarrow{\mathcal{M}^n_I}(1 \to 2) \| = \delta \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$

Non-roulement en I de $\mathbf{2/1}$: $\vec{\Omega}^t_{2/1} = \vec{0}$

Norme : $\| \overrightarrow{\mathcal{M}^t_I}(1 \to 2) \| \leq \nu \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$

Roulement : $\vec{\Omega}^t_{2/1} \neq \vec{0}$

Direction : $\overrightarrow{\mathcal{M}^t_I}(1 \to 2) \wedge \vec{\Omega}^t_{2/1} = \vec{0}$

Sens : $\overrightarrow{\mathcal{M}^t_I}(1 \to 2) \cdot \vec{\Omega}^t_{2/1} < 0$

Norme : $\| \overrightarrow{\mathcal{M}^t_I}(1 \to 2) \| = \nu \, \| \vec{\mathcal{N}}(1 \to 2) \|$